

Lista 3: CM300 Introdução ao Cálculo

A. Ramos *

August 12, 2019

Abstract

Funções e suas propriedades. Funções compostas e inversas.

1 Exercícios

Refaça os exercícios desenvolvidos em aula.

1.1 Funções e suas propriedades

1. Responda

- (a) O que é uma função?
- (b) O que é o domínio e imagem de uma função?
- (c) Dado uma função real f sobre um intervalo. Quando dizemos que f é uma função crescente, decrescente, e constante.

2. Das seguintes expressões, quais definem y como uma função de x ?

- (a) $y = x^2 - 8x + 13$; *rpta* : define
- (b) $y^2 = x - 5$; *rpta* : não define
- (c) $y = 4$ *rpta* : define
- (d) $x^2 - y^2 = 36$ *rpta* : não define
- (e) $x^2 + y^2 = 1$ *rpta* : não define

3. Encontre o maior domínio possível das seguintes funções

- (a) $f(x) = 5/(x^2 - 9)$ *rpta* : $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$
- (b) $g(y) = \frac{y^2 - 3y + 2}{y^3 + 2y^2 - 24} + 9$ *rpta* : $\mathbb{R} \setminus \{0, 4, -6\}$
- (c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 12} + 5x$ *rpta* : $(-\infty, 2] \cup [6, \infty)$
- (d) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3 + a}{x^3 - 8}} + 5x$, com $a \in \mathbb{R}$ *rpta* : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

4. Considere a função $f(x) = x^2 - 4x + 2$ Calcule:

- (a) $f(0)$ e $f(-3)$; *rpta* : 2e23
- (b) $f(a)$, *rpta* : $a^2 - 4a + 2$;
- (c) $f(a + b)$ e $f(a) + f(b)$; *rpta* : $a^2 + b^2 + 2ab - 4a - 4b + 2$ e $a^2 + b^2 - 4a - 4b + 4$.
- (d) $f(ab)$ e $f(a)f(b)$; *rpta* : $a^2b^2 - 4ab + 2$ e $a^2b^2 + 2a^2 + 2b^2 - 4ab(a + b - 4) - 8(a + b) + 4$

Observe que em geral, $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$ e $f(ab) \neq f(a)f(b)$

5. Seja $f(x) = -2x^2 + 3x$. Calcule e simplifique:

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

(a) $f(x+h) - f(x)/h$,

rpta : $-4x - 2h + 3$.

6. Considere duas funções $g(x) = 4 - x^2$ e $f(x) = x^{-2}$. Calcule e simplifique

(a) $f(g(a))$,

rpta : $(4 - a^2)^{-2}$.

(b) $g(f(b))$,

rpta : $4 - b^{-4}$.

(c) $f(g(f(b)))$,

rpta : $16(b^4 - 4)^{-2}$.

7. Conhecendo a fórmula da área de um círculo, escreva o comprimento C como função da área A .

rpta : $C = 2\sqrt{\pi A}$.

8. O preço p por unidade de um produto quando u unidades (em milhares) são produzidas é modelada pela função preço = $p = 12 - 0,025u$ e a receita r (em milhões de reais) é dado por $r = up = u(12 - 0,025u)$.

(a) Encontre uma função que descreva as unidades u em termos do preço;

(b) Esboce o gráfico de receita para uma produção de 0 a 100.000 unidades;

(c) Quantas unidades dever ser produzidas se a receita total é de um milhão? *rpta* : $u \simeq 107,335$ ou $u \simeq 372,665$.

9. Se a função temperatura T tem a forma $T(x) = (5/9)(x - 32)$ onde x é medido em Celsius. Calcule a inversa de T .

rpta : $T^{-1}(x) = (9/5)x + 32$.

10. Considere as funções $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$ e $i(x) = 2x$. Expresse as seguintes funções como a composição das funções f, g, h e i .

(a) $F(x) = \sqrt{x} - 3$;

$g \circ f$

(b) $F(x) = x^{3/2}$

$h \circ g$

(c) $F(x) = \sqrt{8x^3 - 3}$

$g \circ f \circ h \circ i$

11. Encontre os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$ para as seguintes funções

(a) $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = \sqrt{x}$

$[0, \infty)$ e $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

(b) $f(x) = x^2 - 2$; $g(x) = \sqrt{x+1}$

$[-1, \infty)$ e $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

(c) $f(x) = (x+1)^{-1}$; $g(x) = (x-1)^{-1}$

$\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

12. Encontre a inversa para as seguintes funções

(a) $f(x) = x^{-1}$

$f^{-1}(x) = x/(1-x)$

(b) $f(x) = 3x - 2$

$f^{-1}(x) = (x+2)/3$

(c) $f(x) = x + 3/(x-2)$

$f^{-1}(x) = (2x+3)/(x-1)$

(d) $f(x) = x^3 + 5$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

(e) $f(x) = \sqrt{x+2}$

$f^{-1}(x) = x^2 - 2$; $[0, \infty)$

13. Considere a taxa de imposto de renda $I(t)$ como uma função da renda tributável t , sabendo que a taxa de imposto de renda é de 4% para uma renda de até \$30.000, de 5% para rendas tributável entre \$30.000 e \$50.000 e de 6% sobre a renda tributável acima de \$50.000.

rpta :

$$I(t) = \begin{cases} 0,04t & \text{se } 0 < t \leq 30.000 \\ 1200 + 0,05(t - 30.000) & \text{se } 30.000 < t \leq 50.000 \\ 2200 + 0,06(t - 50.000) & \text{se } 50.000 \leq t \end{cases}$$

14. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = -3x + 5$

(b) $f(x) = 4x - 6$

(c) $f(x) = x^2 - x$

(d) $f(x) = -x^2 + 2x$

(e) $f(x) = |x + 1|$